KOMPLEKSNA ANALIZA

Pavle Pandžić, 12. predavanje

Prisjetimo se:

Prošli smo put dokazali Riemannov Teorem o preslikavanju koristeći Montelov teorem i Hurwitzov teorem.

Danas ćemo dokazati ta dva teorema, a također i Arzela-Ascolijev teorem kojeg ćemo koristiti za dokaz Montelovog teorema.

Osim dokaza koji je na svoju web stranicu postavio Ved V. Datar,

https://math.berkeley.edu/~vvdatar/m185f16/notes/Riemann_Mapping.pdf

danas ćemo koristiti i materijale koje je na svoju web stranicu postavio Robert Oeckl:

https://www.matmor.unam.mx/~robert/cur/2010-1

Definicija: familija funkcija ograničena po točkama

Neka je $\mathcal{F}$ familija neprekidnih funkcija na topološkom prostoru X. Ovdje i ubuduće sve funkcije imaju za kodomenu $\mathbb{C}$.

Familija $\mathcal{F}$ je *ograničena po točkama* ako za svaki $x \in X$ postoji konstanta $M > 0$, tako da je

$$|f(x)| < M, \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Definicija: lokalno ekvikontinuirana familija funkcija

Neka je $\mathcal{F}$ familija neprekidnih funkcija na topološkom prostoru X.

Familija $\mathcal{F}$ je *lokalno ekvikontinuirana* ako za svaki $x \in X$ i za svaki $\epsilon > 0$ postoji otvorena okolina U od x takva da je

$$|f(y) - f(z)| < \epsilon, \qquad \forall f \in \mathcal{F}, \ \forall y, z \in U.$$

Definicija: normalna familija funkcija

Neka je $\mathcal{F}$ familija neprekidnih funkcija na topološkom prostoru X.

Familija $\mathcal{F}$ je *normalna* ako svaki niz u $\mathcal{F}$ ima podniz koji konvergira lokalno uniformno na X (tj. uniformno na svim kompaktnim podskupovima od X).

Arzela-Ascolijev teorem

Neka je X separabilan topološki prostor, tj. topološki prostor koji ima gust prebrojiv podskup.

Neka je $\mathcal{F}$ familija neprekidnih funkcija na X koja je ograničena po točkama i lokalno ekvikontinuirana.

Tada je $\mathcal{F}$ normalna familija.

Dokaz

Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{F}$. Treba dokazati da niz (f_n) ima podniz koji konvergira lokalno uniformno na X.

Koristiti ćemo očiti način da podnizove zadanog niza zadajemo pomoću beskonačnih podskupovova od $\mathbb{N}$.

Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz točaka koji je gust u X; takav postoji zbog separabilnosti.

Definiramo $N_0 = \mathbb{N}$ i induktivno $N_k \subseteq N_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, na sljedeći način. Niz $(f_n(x_k))_{n\in N_{k-1}}$ je ograničen zbog pretpostavke da je familija $\mathcal{F}$ ograničena po točkama.

Zato postoji konvergentan podniz tog niza. Neka je taj podniz zadan skupom $N_k \subseteq N_{k-1}$.

Na taj način smo dobili niz beskonačnih podskupova od $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$$

Sada promotrimo strogo rastući niz $(n_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ prirodnih brojeva definiran tako da je n_ℓ ℓ-ti element skupa N_ℓ.

Očito je niz $(f_{n_\ell}(x_k))_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergentan za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je sada K kompaktan podskup od X i neka je $\epsilon > 0$. Budući da je familija $\mathcal{F}$ lokalno ekvikontinuirana, svaki $a \in K$ ima okolinu $U_a \subseteq X$ takvu da vrijedi

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \qquad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall x, y \in U_a.$$

Budući da je skup K kompaktan, i da svi U_a, $a \in K$, čine otvoren pokrivač za K, postoje $a_1, \dots, a_m \in K$ takvi da $U_{a_1}, \dots, U_{a_m}$ pokrivaju K.

Budući da je niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gust u X, za svaki $j \in \{1, \dots, m\}$ postoji $k_j \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{k_j} \in U_{a_j}$.

Niz $(f_{n_\ell}(x_{k_j}))_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergira za svaki $j \in \{1, \dots, m\}$, pa je i Cauchyjev. Zato postoji $\ell_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$|f_{n_i}(x_{k_j}) - f_{n_\ell}(x_{k_j})| < \epsilon, \qquad \forall i, \ell \geq \ell_0,\ \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Fiksirajmo sada $p \in K$. Tada je $p \in U_{a_j}$ za neki $j \in \{1, \dots, m\}$. Zato za $i, \ell \geq \ell_0$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f_{n_i}(p) - f_{n_\ell}(p)| \leq |f_{n_i}(p) - f_{n_i}(x_{k_j})| + |f_{n_i}(x_{k_j}) - f_{n_\ell}(x_{k_j})| \\ + |f_{n_\ell}(x_{k_j}) - f_{n_\ell}(p)| < 3\epsilon. \end{aligned}$$

To povlači da niz $(f_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno na K. $\square$

Definicija: lokalno uniformno ograničena familija funkcija

Neka je $\mathcal{F}$ familija neprekidnih funkcija na topološkom prostoru X.

Familija $\mathcal{F}$ je *lokalno uniformno ograničena* ako za svaki $x \in X$ postoji otvorena okolina U i konstanta $M > 0$, tako da je

$$|f(y)| < M, \qquad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall y \in U.$$

Očito, lokalno uniformna ograničenost povlači ograničenost po točkama.

Montelov teorem

Neka je $\mathcal{F}$ familija holomorfnih funkcija na području $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

Ako je $\mathcal{F}$ lokalno uniformno ograničena, onda je $\mathcal{F}$ normalna.

Dokaz

Dovoljno je dokazati da je familija $\mathcal{F}$ lokalno ekvikontinuirana; tada će tvrdnja slijediti iz Arzela-Ascolijevog teorema.

Neka je $z_0 \in \Omega$ i neka je $\epsilon > 0$. Budući da je $\mathcal{F}$ lokalno uniformno ograničena, postoje konstante $M > 0$ i $r > 0$ takve da je $\bar{K}(z_0, 2r) \subset \Omega$ i da je

$$|f(z)| < M, \qquad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall z \in \bar{K}(z_0, 2r).$$

Prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, $\forall f \in \mathcal{F}$ i $\forall z, w \in K(z_0, 2r)$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(z_0,2r)} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} \right) d\zeta \\ = \frac{z-w}{2\pi i} \int_{S(z_0,2r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - w)} d\zeta. \end{aligned}$$

Ako se ograničimo na $z, w \in K(z_0, r)$, onda je

$$|(\zeta - z)(\zeta - w)| > r^2, \qquad \forall \zeta \in S(z_0, 2r).$$

Sada fundamentalna ocjena integrala povlači

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{2|z-w|}{r} \max_{\zeta \in S(z_0,2r)} |f(\zeta)| < \frac{2|z-w|M}{r}.$$

Slijedi da za $\delta = \min(r, \frac{r\epsilon}{4M})$ dobivamo

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon \qquad \forall z, w \in K(z_0, \delta)$$

što dokazuje lokalnu ekvikontinuiranost i završava dokaz. □

Hurwitzov teorem

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje.

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ niz holomorfnih injektivnih funkcija koje konvergiraju prema $F : \Omega \to \mathbb{C}$ lokalno uniformno na Ω.

Tada je F ili injektivna funkcija ili konstanta.

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, tj. da F nije niti konstanta niti injektivna. Tada za neki $w \in \mathbb{C}$ postoje $a, b \in \Omega$, $a \neq b$, takvi da je $F(a) = F(b) = w$.

Neka je $w_n = f_n(a)$; tada $w_n \to w$.

Budući da F nije konstanta, a Ω je područje, Princip jedinstvenosti povlači da je b izolirana nultočka funkcije $z \mapsto F(z) - w$, pa postoji $r > 0$ takav da je

$$F(z) \neq w, \qquad \forall z \in \bar{K}^*(b,r).$$

Posebno, $a \notin \bar{K}(b,r)$. Budući da je f_n injektivna funkcija za svaki n, slijedi da funkcija $z \mapsto f_n(z) - w_n$ nema nultočaka u $\bar{K}(b,r)$, jer je jedina nultočka te funkcije a.

Dakle Princip argumenta primijenjen na funkciju $z \mapsto f_n(z) - w_n$ povlači

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(b,r)} \frac{f_n'(\zeta)}{f_n(\zeta) - w_n} d\zeta = 0.$$

Budući da $f_n \to F$ lokalno uniformno, vrijedi da

$$f_n'(\zeta) \to F'(\zeta); \qquad f_n(\zeta) - w_n \to F(\zeta) - w$$

uniformno na $\bar{K}(b,r)$.

Iz toga slijedi da i integral konvergira, pa je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(b,r)} \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta) - w} d\zeta = 0.$$

Međutim, po Principu argumenta taj je izraz jednak broju nultočaka funkcije $\zeta \to F(\zeta) - w$ u krugu $K(b,r)$ (računajući kratnosti), a taj je broj najmanje 1 jer je $F(b) = w$.

To je kontradikcija pa je teorem dokazan. $\square$